PART2　ベクトルの内積と成分，ベクトルのなす角

2　(1)　2 つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 2)$ と $\vec{b}=(2,\ k)$ のなす角が 45° であるとき，k の値を求めよ。

(2)　ベクトル $\vec{a}=(1,\ -2)$ と垂直な単位ベクトルを求めよ。

Point Pickup

$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のなす角を θ とすると

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$$

$$\cos\theta=\frac{\vec{a}\cdot\vec{b}}{|\vec{a}||\vec{b}|}=\frac{a_1b_1+a_2b_2}{\sqrt{a_1^2+a_2^2}\sqrt{b_1^2+b_2^2}}$$

とくに　$\vec{a}\perp\vec{b} \iff \vec{a}\cdot\vec{b}=0 \iff a_1b_1+a_2b_2=0$

第 8 講　PART2　確認問題

1　2 つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 1)$ と $\vec{b}=(k,\ 1)$ のなす角が 60° であるとき，k の値を求めよ。

$$k=\boxed{\text{アイ}}+\sqrt{\boxed{\text{ウ}}}$$

2　ベクトル $\vec{a}=(3,\ 4)$ と垂直な単位ベクトル $\vec{n}$ を求めよ。

$$\vec{n}=\left(\frac{\boxed{\text{エ}}}{\boxed{\text{オ}}},\ \frac{\boxed{\text{カキ}}}{\boxed{\text{ク}}}\right),\ \left(\frac{\boxed{\text{ケコ}}}{\boxed{\text{サ}}},\ \frac{\boxed{\text{シ}}}{\boxed{\text{ス}}}\right)$$

PART2　ベクトルの内積と成分，ベクトルのなす角

2　(1)　2 つのベクトル $\vec{a}=(1,\ 2)$ と $\vec{b}=(2,\ k)$ のなす角が 45° であるとき，k の値を求めよ。

(2)　ベクトル $\vec{a}=(1,\ -2)$ と垂直な単位ベクトルを求めよ。

(1)　$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+2^2}=\sqrt{5}$，$|\vec{b}|=\sqrt{2^2+k^2}$，$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times2+2\times k=2+2k$

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 45° であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos45^\circ \quad \text{すなわち} \quad 2+2k=\sqrt{5}\sqrt{4+k^2}\times\frac{1}{\sqrt{2}} \cdots\cdots ①$$

①は(右辺)>0 であるから(左辺)>0　よって　$2+2k>0$ より $k>-1$

このとき①の両辺を 2 乗して

$$(2+2k)^2=5(4+k^2)\times\frac{1}{2}$$

$$3k^2+16k-12=0 \qquad (3k-2)(k+6)=0 \qquad k=\frac{2}{3},\ -6$$

$k>-1$　より　$k=\dfrac{2}{3}$

(2)　求めるベクトルを $\vec{n}=(x,\ y)$ とおく。

$\vec{a}\perp\vec{n}$ より　$\vec{a}\cdot\vec{n}=0$　すなわち　$x-2y=0 \cdots\cdots ①$

また，$|\vec{n}|=1$ より　$\sqrt{x^2+y^2}=1$　すなわち　$x^2+y^2=1 \cdots\cdots ②$

①より　$x=2y$　　これを②に代入して

$$4y^2+y^2=1 \qquad y^2=\frac{1}{5} \quad \text{よって} \quad y=\pm\frac{1}{\sqrt{5}}$$

したがって，求めるベクトルは

$$\vec{n}=\left(\frac{2}{\sqrt{5}},\ \frac{1}{\sqrt{5}}\right),\ \left(-\frac{2}{\sqrt{5}},\ -\frac{1}{\sqrt{5}}\right)$$

第 8 講　PART2　確認問題 解答

1 **[正解]** アイ：-2，ウ：3

[解説]

$$|\vec{a}|=\sqrt{1^2+1^2}=\sqrt{2}$$

$$|\vec{b}|=\sqrt{k^2+1^2}=\sqrt{k^2+1}$$

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=1\times k+1\times 1=k+1$$ [A]

$\vec{a}$ と $\vec{b}$ のなす角が 60° であるから

$$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos 60^\circ$$ [B]

すなわち

$$k+1=\sqrt{2}\sqrt{k^2+1}\times\frac{1}{2}\ \cdots\cdots①$$

（右辺）>0 であるから　（左辺）>0

よって　$k+1>0$　　$k>-1$

このとき，①の両辺を 2 乗して

$$(k+1)^2=2(k^2+1)\times\frac{1}{4}$$

$$k^2+4k+1=0$$

ゆえに　$k=-2\pm\sqrt{3}$

$k>-1$ より　$\boldsymbol{k=-2+\sqrt{3}}$

[A]　ベクトルの内積（成分）
$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$ のとき
$\vec{a}\cdot\vec{b}=a_1b_1+a_2b_2$

[B]　ベクトルの内積
$\vec{0}$ でない 2 つのベクトル $\vec{a}$，$\vec{b}$ のなす角を $\theta\ (0^\circ\leqq\theta\leqq 180^\circ)$ とすると
$\vec{a}\cdot\vec{b}=|\vec{a}||\vec{b}|\cos\theta$

2 **[正解]** エ：4，オ：5，カキ：−3，ク：5，
ケコ：−4，サ：5，シ：3，ス：5

[解説]

$\vec{n}=(x,\ y)$ とおく。

$\vec{a}\perp\vec{n}$ より　$\vec{a}\cdot\vec{n}=0$ [C]

すなわち　$3x+4y=0$ ……①　[A]

また，$|\vec{n}|=1$ より　$\sqrt{x^2+y^2}=1$

すなわち　$x^2+y^2=1$ ……②

①より　$y=-\dfrac{3}{4}x$

これを②に代入して

$$x^2+\left(-\frac{3}{4}x\right)^2=1$$

$$x^2=\frac{16}{25}$$

よって　$x=\pm\dfrac{4}{5}$

$x=\dfrac{4}{5}$ のとき　$y=-\dfrac{3}{5}$

$x=-\dfrac{4}{5}$ のとき　$y=\dfrac{3}{5}$

したがって，求めるベクトルは

$$\vec{n}=\left(\frac{4}{5},\ -\frac{3}{5}\right),\ \left(-\frac{4}{5},\ \frac{3}{5}\right)$$

[C]　$\vec{a}=(a_1,\ a_2)$，$\vec{b}=(b_1,\ b_2)$
$(\vec{a}\neq\vec{0},\ \vec{b}\neq\vec{0})$ のとき
$\vec{a}\perp\vec{b}\iff\vec{a}\cdot\vec{b}=0$
$\iff a_1b_1+a_2b_2=0$